

REPORT OF A CLASSROOM EXPERIENCE FOR THE DEVELOPMENT OF DISTRIBUTION MODELS

EXPERIENCIA EN EL AULA PARA EL DESARROLLO DE MODELOS PARA EL REPARTO

María José Aviña González
Facultad de Ciencias Exactas UJED

Angelina Alvarado Monroy
Facultad de Ciencias Exactas UJED

This paper presents the design and analysis of a Model-Eliciting Activity (MEA), which aims to support the refinement of the conceptual system associated with directly proportional distribution problems (example: linear function, percentage, proportion, variation, etc.). The situation explores a context that is close to the student, encouraging the construction of a generalizable mathematical model that can be transferred to diverse contexts. For the design, the principles of the Models and Modeling perspective (Lesh and Doerr, 2003) were considered. The target population were students enrolled in the first semesters of a university degree in Accounting. For the analysis, we considered the construction of models (performed in teams); the mathematical representations within the process observed (such as diagrams and tabular organizations); as well as the individual solutions of the students.

Keywords: Model-Eliciting Activities, Models and modeling, Distribution problems

Objectives and purpose of the study

Distribution problems may represent an opportunity for college students to delve into mathematical notions related to the multiplicative conceptual system. Researchers such as Martínez-Juste, Muñoz-Escalano and Oller-Marcén (2019) consider that distribution problems have gained relevance in recent years because they can explore a diversity of contexts close to the reality of the students.

The multiplicative conceptual system associated with distribution problems elicit fundamental ideas of mathematics, that's why it is present in the curricula from elementary education to high school. In Mexico, these kind of problems are introduced in the third grade of elementary school (SEP, 2017) and, in subsequent years, variants of these problems are developed where notions such as: proportionality (direct and inverse), linear function, percentage, ratio, linear equation, rational number, proportion, variation and arithmetic progressions. According to Sánchez-Ordoñez (2013), distribution problems allow on the one hand, to shape reason, proportion and proportionality as mathematical objects that contribute to the understanding and mastery of the multiplicative conceptual field by students, and on the other hand, to identify the way in which ratios, proportions and proportionality are recognized and manipulated by students in classroom situations (p. 71,72).

Based on this, the intention is to answer the question: Which are the cycles of understanding that emerge in undergraduate students when they are solving a distribution MEA? In order to develop a possible answer, we present the analysis of the solutions for a situation which was solved by a group of students enrolled in the first semester of a degree in Accounting at the School of Economics, Accounting and Administration of our institution (UJED), with the intention of eliciting the notion of proportionality and to develop integrated knowledge in order to connect and refine the associated conceptual system. It should be noted that the activity was led by the teacher who is also the author of this article.

The Models and Modeling perspective (Lesh and Doerr, 2003) was fundamental for the theoretical framework. The proposed activity was designed as a MEA. Thus, the proposed situation aims to promote the construction of a reusable and generalizable model that provokes mathematical understanding in students in order to achieve the objective of refining and eliciting concepts

associated with the multiplicative conceptual system; such as those associated with algebra (ratio, linear variation, function, etc.) as the ones associated with statistics (percentage, frequency tables, etc.). This activity is part of a sequence of activities which were aimed at achieving the course objectives, however, in this paper only the scope of the distribution MEA will be mentioned.

The analysis presented includes the solution interpretation of the student's productions that emerged during the problem solving process where the student used mathematical resources available in order to build a model that can be generalized to solve similar but varied situations.

The Models and Modeling Perspective (PMM) as a theoretical framework

This perspective was developed by Lesh and Doerr (2003) and proposes the resolution of problematic situations endowed with a real context, which can be approached from the particular, taking, as a starting point, the previous knowledge that each participant may have. Through the socialization of the solution proposals, the refinement of the solution model that satisfies the requirements of the approach is reached. The MMP considers learning as a process for developing conceptual systems (models), which emerge when students share and analyze situations that have more than one answer, so that the solution is not a number or word. The problems addressed should encourage students to describe, argue and explain the solution processes used. Doerr (2016) explains that learning mathematical content is a process of developing an adequate and productive model that could be used and reused in a certain range of contexts.

The MMP considers that learning mathematics is a process that includes progressive construction of understanding cycles, modification, extension and refinement of ways of thinking where the subjects manage to elicit a mathematical concept or construct at different levels by relating data, goals and the possible routes of solution they are exposed to when facing a problematic situation (Lesh and Doerr, 2003). Therefore, the product of learning is the process in which the fluidity of mathematical representations allows for the understanding of most of the mathematical constructions (Lesh and Doerr, 2003).

In MMP, the ADM or MEA are proposed as a way to generate products that go beyond short answers to specific questions. MEA allow students to get involved in an interactive and iterative process where they express, test and redefine their ways of thinking about significant problem situations (Doerr, 2016). Therefore, the meaningfulness of the context provokes new mathematical understanding in the students, which allows them to express, in their procedures, their current knowledge that can come from their experience and/or their previous mathematical knowledge.

MEA must comply with the six design principles established by Lesh, Hoover, Hole, Kelly, and Post (2000) which are: reality or personal meaning, construction of the model, self-evaluation, model externalization or model documentation, simple prototype and model generalization.

The characterization of understanding cycles exposed by Vargas-Alejo, Reyes-Rodríguez and Cristóbal-Escalante (2016) was used for the analysis of the model construction process. The researchers propose a characterization based on their interpretation of the MMP in which they identify cycles (qualitative, quantitative and algebraic) that emerge when individuals approach contextualized situations. Understanding cycles is also associated with eliciting a mathematical construct or concept, which is why, for example, in a *qualitative understanding cycle* the individual gives meaning to the situation where the problem develops and can identify the variables involved, as well as the possible relationship between them. However, in order to express this relationship the individual only elaborates verbal descriptions, diagrams, analogies or metaphors. In contrast, in a *quantitative understanding cycle* the individual makes assumptions, discards useless information and may establish a quantitative meaning of linguistic expressions by making numerical comparisons, for this, the student may use tabular and graphical representations which leads to a more elaborate interpretation of the situation. When the individual seeks to describe and interpret a phenomenon

through the construction, use, transit and coordination of different representations (tabular, graphic, verbal, etc.) where there is fluency between them and algebraic symbols can be manipulated to solve a situation, then he has reached the *algebraic understanding cycle*. Researchers agree that, in order to reach the last cycle, it is possible for the individual to pass through different interpretations of the situation and, previously, has managed to differentiate, integrate and refine different models.

Design studies

Within design research there are multiple methodologies and theoretical perspectives in education and other fields. Some researchers consider that process and tangible products (didactic sequences, associated conceptual systems, etc.) are involved in the design (Hjalmarson and Lesh, 2008). However, intangible products formed during the process are also relevant, since the objective of this methodology is to improve the design processes and, consequently, to obtain different results both within the process and the product.

The design of this experiment is composed of three phases: preparing for the experiment, experimenting in the classroom and conducting retrospective analyzes of the data generated during the implementation with the students (Cobb & Gravemeijer, 2008). This type of study aims to develop particular forms of learning while studying the learning obtained in the designed environments.

Investigation method

The target population, the context and the data collection techniques, as well as the theoretical and methodological tools for its analysis, are described below.

Study population

The activity presented was implemented in a group of 36 students enrolled in the first semester of studies for a degree in accounting and whose ages ranged between 18 and 20 years of age. In previous sessions, the members had solved a modeling activity, so they already had experience in dealing with this type of situation. The implementation of the activity required 4 sessions of one hour each. During the implementation, data was collected through photographs, video, and student logs.

The participants were organized into nine teams made up of four members each. The activity was solved as a team and, later, the solution reached was socialized in a group discussion. In a final production, the students submitted an individual solution to the problem. The role of the teacher was key throughout the process, asking key questions to the students aimed at deepening the solution model reached.

Description of activities

The design and characterization of the models developed during the implementation were based on the MMP theoretical framework. To familiarize the students with the context of the situation, the “warm-up” activity is presented (Figure 1), which consisted of reading a newspaper article and a subsequent group discussion to clarify possible doubts regarding the understanding of the context. The MEA (Figure 2) was then presented, which addressed a problem related to the context of the reading. These activities are described below, accompanied by the image of the worksheets.

Warm-up activity (Figure 1). It had the aim of introducing the context from real and current data to sensitize students to the problem and motivate them to resolve the profit sharing situation in the ADM (Figure 2).

Model Eliciting Activity: Income Distribution. In this activity (Figure 2), the situation shows a sister and brother (Alondra and Paco) who decide to start a business together where the tasks they would perform are divided equally. However, the time that Alondra spends doing her tasks represents eight times more than what her brother Paco dedicated to his tasks. The situation also takes into consideration that Paco contributed a little more than half of the initial investment. This has given

rise to the dilemma of how to distribute the income; therefore, the brother and sister have decided to ask for help so that the students have to propose solutions for the distribution of the profits.



Figure 1: Warm-up activity

PROBLEMA 3

Para comenzar su negocio de pasteles, Alondra y Paco habían invertido \$800.00 pesos, de los cuales Paco había aportado \$455.00 y Alondra \$345.00 y, desde el principio, ambos hermanos habían comenzado trabajando tanto en la elaboración como en la venta. Sin embargo, negocio de pasteles había crecido, por lo que consideraron necesario dividir el trabajo. Paco se dedicó a calendarizar los pedidos, cobrar y entregar los pasteles, mientras que Alondra se encargó de comprar los ingredientes, hacer los pasteles y decorarlos. Paco tenía varios conocidos que habían probado los pasteles elaborados por Alondra, por lo que no tardó en comenzar a calendarizar los pedidos de pasteles y pasteletos. Los pedidos quedaron así:

Pedidos		Pedidos semanales	
• Para el Lunes	debe entregar dos pasteles para el cumpleaños de Jorge	• Lunes	2 pasteles, cumpleaños de Jorge
• Para el martes	debe entregar seis pasteles para la cafetería "El encuentro"	• Martes	3 pasteles para cafetería "El encuentro"
• Para el miércoles	debe entregar un pastel y una docena de pasteletos o cupcakes para el cumpleaños de Regino	• Miércoles	1 pastel, 12 cupcakes
• Para el jueves	debe entregar 20 pasteletos o cupcakes para el babyshower de Sofía	• Jueves	20 pasteletos o cupcakes
• Para el viernes	debe entregar 2 pasteles y 62 cupcakes para el cumpleaños del jefe de Radil	• Viernes	2 Pasteles, 62 cupcakes
• Para el sábado		• Sábado	3 Pasteles, 12 cupcakes
• Para el domingo		• Domingo	1 Pasteles, 12 cupcakes
• Para la noche		Notas	
• Al finalizar la semana, Alondra está muy cansada pues, por cada cuarto de hora que Paco había destinado a la venta, ella había dedicado 2 horas al proceso de preparación de los pasteles.		Al finalizar la semana, Alondra estaba muy cansada pues, por cada cuarto de hora que Paco había destinado a la venta, ella había dedicado 2 horas al proceso de preparación de los pasteles.	

Al finalizar la semana, Alondra estaba muy cansada pues, por cada cuarto de hora que Paco había destinado a la venta, ella había dedicado 2 horas al proceso de preparación de los pasteles.

Ayuda a los hermanos a llegar a una forma de repartir las ganancias entre ambos. Puedes tomas como base la información que se te presenta y analizar las posibles maneras de dividir las ganancias entre ambos, también puedes buscar maneras alternativas de repartir las ganancias, sin embargo debes sugerir la que consideres mejor y justificar el por qué. Considera que Alondra y Paco continuarán con su negocio de pasteles, por lo que las condiciones pueden variar, por ejemplo, pude que haya veces que Paco trabaje más horas que Alondra o que Alondra decida invertir más dinero en la empresa.

Redacta una carta donde expliques cual es la manera que sugieres para la repartición de las ganancias, justifica las razones que te llevaron a concluir esto y realiza una comparación de los beneficios que conlleva esta repartición en comparación de las otras.

Figure 2: MEA income distribution

Results

In this section, students' productions are analyzed during the resolution of the proposed activities, first in a team and then in a group discussion. The characterization of the understanding cycles of Vargas-Alejo, Reyes-Rodríguez and Cristóbal-Escalante (2016) was used for the analysis of the construction process of a model that responds to the situation presented in the MEA exhibited by the students.

Understanding cycles

The warm-up activity (Figure 1) introduced the context. It was during the implementation of the MEA (Figure 2) were the students put into evidence the understanding cycles they went through, as well as the concepts and representations that emerged from their previous individual knowledge. The interaction with their teammates allowed to observe, in the written procedures, the solution model for income distribution. The observations made are briefly explained below.

Qualitative understanding cycle. This cycle took place after the students read the problem. In it, they selected the data that they considered important for the resolution of the ADM and discarded the information that they considered irrelevant. For example, within the data shown in student procedures is the division of labor. This data was part of the writing of the ADM; however, the information does not follow the arrangement in the document that allows for the visual comparison of the quantities. Therefore, the order where a visual comparison can be made of the data selected as relevant to the situation was notable in the students' productions. This allowed us to identify a qualitative approach to solving the problem.

Quantitative understanding cycle. After the students made a qualitative comparison of the selected information, they decided to make different mathematical representations in the construction of a solution model. Among the procedures exhibited, the following was observed:

Circular diagrams. The implicit use of percentages is shown to designate the proportion of the graph that corresponds to a category as a percentage of investment or time dedicated to a task.

Arithmetic representations. For the calculation of the fourth proportional, the students used the algorithm known as the “rule of three”. For example, this procedure allowed them to find the percentage proportion corresponding to the initial contribution of Paco and Alondra.

Tabular representation. The evidence shows the tabular organization where the linear variation was related, the arithmetic progression and the search for the unit value. This representation was used by teams 1 and 2. It shows the use of rational numbers and the designation of time units (hours); the teams used this to be able to identify and compare the time that each member dedicated to their tasks.

Algebraic understanding cycle. The evidence written by the members shows algebraic representations of linear functions.

Solution models formalization prior to group discussion

Students were asked to give a short presentation regarding their solution. All the teams presented their solutions. The solutions presented show: the distribution of the income taking into account each partner's investment proportion; the time spent on their tasks; or a mix of both elements to decide the fairest distribution, taking into account some other characteristics such as the difficulty of the tasks.

Group discussion of solutions achieved by the teams

It was during the group discussion of the results by the team that a refinement of the model was observed. The group presentation and discussion allowed the students to appeal to mathematical representations that emerged during the understanding cycles and allowed, not only to support and argue about the solution model reached, but also to construct other representations that had not emerged in the models achieved by the teams.

Table 2 summarizes some of the procedures shown, the mathematical concepts that emerged, as well as their representations.

Table 1 Results of the implementation of the distribution activity

Cycles	Representation	Procedures	Mathematical concepts
Qualitative	Verbal		Comparison
	Arithmetic	Fourth proportional calculation Use of the circular diagram to represent quantities (investment and time worked).	Fraction Reason Proportion Percentage Proportionality
	Diagrams	Arithmetical progression Frequency	
Quantitative	Tabular	Use of algebraic symbolism	Constants and variables Value unit Dimensional Unit
Algebraic	Algebraic	Use of algebraic symbolism	Linear function

Source: Our own elaboration based on Vargas-Alejo, Reyes-Rodríguez and Cristóbal-Escalante (2016)

Discussion and conclusion

As a design study, a first conclusion is that the activity complies with the design of a MEA by verifying that it satisfies the design principles established by the researchers Lesh, Hoover, Hole, Kelly, and Post (2000). The topics addressed in the modeling tasks documented in this article have interested students who have been involved in developing a solution that contrasts with the situation raised to validate it and, later were able to refine it in more than one cycle of understanding. The transition between the qualitative, quantitative, as well as the algebraic cycles was observed in the procedures carried out by the participants during the implementation of the activity. However, the researchers Vargas-Alejo, Reyes-Rodríguez and Cristóbal-Escalante (2016) mention: “conceptual understanding or understanding is not achieved through a linear process [...] there may be intermediate understanding cycles between the previous cycles, which indicate a transition between cycles and involve an incomplete development of the differentiation, integration and refinement phases” (p. 70). Figure 3 shows an example regarding the transit between cycles of understanding, in this case, students are between the cycle of quantitative and algebraic understanding since they identify a “formula” to generalize the possible solutions for the distribution of profits, however, the expression used is not algebraic.

◦ Los 2 Recursos que en este caso se invierten en el negocio de la Repostería son: El Tiempo y El Dinero.

Como sabemos 800\$ es la inversión total, Alondra invirtió 345\$ ósea un 43.125% y Paco 455 un 56.875%

Cuando alondra trabaja 2 horas, Paco apenas trabaja 15 minutos, en términos de porcentajes

Alondra hace 87.5% del trabajo mientras que Paco un 12.5%

Y si se siguiera una de las 2 escalas, la repartición de la ganancia sería muy desigual, porque al pagarle según su inversión, Paco recibiría más dinero solo por haber invertido más y no trabajar casi nada en comparación, mientras que si se hiciera la repartición en función del tiempo invertido Alondra recibiría mucho más que Paco e incluso Paco terminaría perdiendo dinero.

Por lo tanto la mejor opción es realizar un promedio entre ambos parámetros con la siguiente fórmula

$(\% \text{ de aportación} + \% \text{ de Tiempo}) / 2$ Para así realizar una proporción ideal

Figure 3: Evidence of transition from the quantitative to algebraic understanding cycle

References

Carpenter, T. P., Fennema, E. & Romberg, T.A. (2012). *Rational numbers: An integration of research*. New York & London: Routledge, Taylor & Francis Group.

Cobb, P., & Gravemeijer, K. (2008). Experimenting to Support and Understand Learning Processes. En A. Kelly, R. Lesh & Baek, J. (Eds.) *Handbook of Design Research Methods in Education: Innovations in Science*. (pp. 68-95). New York: Routledge.

Hjalmarson, M., & Lesh, R. (2008). Engineering and Design Research. En A. Kelly, R. Lesh, & J. Baek, *Handbook of Design Research Methods in Education* (pp. 96-110). New York: Routledge.

Lesh, R., & Doerr, H. (2003). Beyond constructivism: A models and modelling perspective on teaching, learning, and problem solving in mathematics education. Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associate.

Lesh, R., Hoover, M., Hole, B., Kelly, A., Post, T., (2000). Principles for Developing Thought-Revealing Activities for Students and Teachers. En *Research Design in Mathematics and Science Education* (pp. 591-646). Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Martínez-Juste, S., Muñoz-Escalano, J. M. y Oller-Marcén, A. M. (2019). Introduciendo los repartos inversamente proporcionales durante dos ciclos de investigación-acción. En J.M. Marbán et al. (Eds.) *Investigación en Educación Matemática XXIII*, 413-422. Valencia, España: SEIEM.

Sánchez-Ordoñez, E. A. (2013). Razones, proporciones y proporcionalidad en una situación de reparto: una mirada desde la teoría antropológica de lo didáctico. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, 16(1), 65-97. Recuperado en 20 de noviembre de 2019, de http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1665-24362013000100004

Vargas-Alejo, V., & Reyes-Rodríguez, A., & Cristóbal-Escalante, C. (2016). Ciclos de entendimiento de los conceptos de función y variación. En *Educación Matemática*, 28 (2), 59-83.

Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. La teoría de los campos conceptuales. En *Recherches en Didactiques des Mathématiques*, 10(2), 133-170.

EXPERIENCIA EN EL AULA PARA EL DESARROLLO DE MODELOS PARA EL REPARTO

REPORT OF A CLASSROOM EXPERIENCE FOR THE DEVELOPMENT OF DISTRIBUTION MODELS

María José Aviña González

Facultad de Ciencias Exactas UJED

Angelina Alvarado Monroy

Facultad de Ciencias Exactas UJED

Este escrito presenta el diseño y análisis de una Actividad Detonadora de Modelos (ADM), la cual pretende apoyar el refinamiento del sistema conceptual asociado a los problemas de reparto directamente proporcional (ejemplo: función lineal, porcentaje, proporción, variación, etc.). La situación explora un contexto cercano al estudiante alentando a la construcción de un modelo matemático generalizable y transferible a contextos diversos. Para el diseño se consideraron los principios de la perspectiva de Modelos y Modelación (Lesh y Doerr, 2003). La población objetivo fueron estudiantes inscritos en los primeros semestres de la carrera de Contador Público. En el análisis se consideraron la construcción de modelos (realizada en equipos); las representaciones matemáticas dentro del proceso observados (como diagramas y organizaciones tabulares); al igual que las soluciones individuales de los alumnos.

Objetivos y propósitos del estudio

Los problemas de reparto pueden representar una oportunidad para que los estudiantes universitarios profundicen en nociones matemáticas vinculadas con el sistema conceptual multiplicativo. Investigadores como Martínez-Juste, Muñoz-Escolano y Oller-Marcén (2019) consideran que los problemas que plantean una situación de reparto han tomado relevancia en los últimos años debido a que pueden explorar una diversidad de contextos cercanos a la realidad de los estudiantes.

El sistema conceptual multiplicativo asociado con los problemas de reparto vincula ideas fundamentales de las matemáticas, es por ello que está presente en la currícula desde la educación inicial hasta la educación media superior. En México, este tipo de problemas son introducidos a partir del tercer año de educación básica (SEP, 2017) y, en los años subsecuentes, se desarrollan variantes de dichos problemas donde se abordan nociones como: proporcionalidad (directa e inversa), función lineal, porcentaje, razón, ecuación lineal, número racional, proporción, variación y progresiones aritméticas, entre otros. Según Sánchez-Ordoñez (2013) los problemas de reparto permiten «por un lado, dar forma a la razón, la proporción y la proporcionalidad como objetos matemáticos que contribuyen al entendimiento y dominio del campo conceptual multiplicativo por parte de los estudiantes, y por el otro, identificar la manera como son reconocidas y manipuladas las razones, las proporciones y la proporcionalidad por los estudiantes en situaciones de aula» (p. 71,72).

Dado lo anterior, se pretende dar respuesta a la pregunta: ¿Cuáles son los ciclos de entendimientos que emergen en los estudiantes de nivel superior al resolver la ADM de reparto? En aras de elaborar una posible respuesta, se presentará el análisis de las soluciones para la situación planteada y, la cual, fue resuelta por un grupo de estudiantes inscritos en los primeros semestres de la carrera de Contador Público en la la UJED con la intención de profundizar en la noción de proporcionalidad y desarrollar

conocimientos que se integren para conectar y refinar el sistema conceptual asociado. Cabe señalar que la actividad fue dirigida por el docente quien también es el autor de este artículo.

La perspectiva de Modelos y Modelización (Lesh y Doerr, 2003) fue fundamental para el marco teórico, dado que la actividad de reparto propuesta, fue diseñada como una ADM. Así, la situación planteada pretende promover la construcción de un modelo reusable y generalizable que, a su vez, provoque entendimiento matemático en los estudiantes para alcanzar el objetivo de refinar y profundizar en conceptos asociados al sistema conceptual multiplicativo; tanto aquellos asociados al álgebra (razón, variación lineal, función, etc.) como a la estadística (porcentaje, tablas de frecuencia, etc.). Esta actividad forma parte de una secuencia de actividades las cuales estaban encaminadas a lograr los objetivos del curso, sin embargo, en este escrito sólo se mencionarán los alcances de la ADM de reparto.

El análisis que se presentará comprende la interpretación de los procedimientos de solución que surgen entre los estudiantes durante la resolución del problema al hacer uso de los recursos matemáticos dispuestos a su alcance para construir un modelo que pueda generalizarse para resolver situaciones similares pero variadas.

La Perspectiva de Modelos y Modelación (PMM) como marco teórico

Esta perspectiva fue elaborada por Lesh y Doerr (2003) y propone la resolución de situaciones problemáticas dotadas de un contexto real, las cuales, pueden ser abordadas desde lo particular tomado, como punto de partida, los conocimientos previos que cada participante pueda tener. El refinamiento se lleva a cabo mediante la socialización de las propuestas de solución donde se alcanza un modelo de solución que satisface los requerimientos del planteamiento. La PMM considera al aprendizaje como un proceso de desarrollo de sistemas conceptuales (modelos), los cuales emergen cuando los estudiantes comparten y analizan situaciones que tienen más de una respuesta, por lo que la solución no es un número o palabra. Las problemáticas abordadas deben alentar a los estudiantes a describir, argumentar y explicar los procesos de solución empleados. Doerr (2016) explica que el aprendizaje de un contenido matemático surge durante el proceso de desarrollo de un modelo adecuado y productivo el cual puede ser usado y reusado en cierto rango de contextos.

La PMM considera que aprender matemáticas es un proceso que comprende ciclos progresivos de construcción de entendimiento, modificación, extensión y refinamiento de formas de pensar donde los sujetos logran profundizar en un concepto o constructo matemático a distintos niveles al relacionar datos, metas y posibles rutas de solución expuestos al enfrentar una situación problemática (Lesh y Doerr, 2003). Por lo tanto, el producto del aprendizaje es el proceso durante el cual la fluidez de las representaciones permite entender la mayoría de las construcciones matemáticas (Lesh y Doerr, 2003).

Dentro de la PMM se proponen a las ADM o MEA como una manera de generar productos que vayan más allá de respuestas cortas a preguntas específicas. Las ADM permiten a los estudiantes involucrarse en un proceso interactivo e iterativo donde expresan, prueban y redefinen sus maneras de pensar respecto a situaciones problemáticas significativas (Doerr, 2016), de esta manera, al estar en un contexto significativo, provocan entendimiento matemático nuevo en los estudiantes permitiéndoles expresar en sus procedimientos su conocimiento actual el cual puede provenir tanto de su experiencia como de su conocimiento matemático previo.

Las ADM deben cumplir con los seis principios del diseño establecidos por Lesh, Hoover, Hole, Kelly, y Post (2000) los cuales son: significado de la realidad o personal, construcción del modelo, auto-evaluación, externalización del modelo o de documentación del modelo, prototipo simple y generalización de modelos.

La caracterización de los ciclos de entendimiento expuesta por Vargas-Alejo, Reyes-Rodríguez y Cristóbal-Escalante (2016) fue utilizada para el análisis del proceso de construcción de modelos. Los

investigadores proponen una caracterización a partir de su interpretación de la PMM en la cual identifican ciclos (cuantitativo, cuantitativo y algebraico) que surgen cuando los individuos abordan situaciones contextualizadas. Los ciclos de entendimiento también están asociados con la profundización de un constructo matemático o concepto, es por ello que, por ejemplo, en un *ciclo de entendimiento cualitativo* el individuo da sentido a la situación donde se desarrolla el problema y puede llegar a identificar las variables involucradas, así como la posible relación entre ellas, sin embargo, para expresar dicha relación sólo elabora descripciones verbales, diagramas analogías o metáforas. En contraste, en un *ciclo de entendimiento cuantitativo* el individuo elabora supuestos, descarta información que considera inútil y puede llegar a establecer cuantitativamente el significado de expresiones lingüísticas haciendo comparaciones numéricas, para ello, puede llegar a utilizar representaciones tabulares y gráficas lo que conlleva a una interpretación más elaborada de la situación. Cuando el individuo busca describir e interpretar un fenómeno a través de la construcción, utilización, tránsito y coordinación de distintas representaciones (tabulares, gráficas, verbales, etc.) fluidez entre ellas y puede manipular símbolos algebraicos para resolver una situación, entonces ha alcanzado el *ciclo de entendimiento algebraico*. Los investigadores coinciden que, para poder alcanzar el último ciclo, es posible que el individuo haya pasado por diferentes interpretaciones de la situación y, previamente, haya logrado diferenciar, integrar y refinar distintos modelos.

Estudios de diseño

Dentro de la investigación del diseño se encuentran múltiples metodologías y perspectivas teóricas en la educación y otros campos. Algunos investigadores consideran que, tanto el proceso como los productos tangibles (secuencias didácticas, sistemas conceptuales asociados, etc) están involucrados en el diseño (Hjalmarson y Lesh, 2008). Sin embargo, también son relevantes los productos intangibles formados durante el proceso, puesto que el objetivo de esta metodología es mejorar los procesos de diseño y, en consecuencia, a resultados diferentes tanto dentro del proceso como en el producto.

Es importante considerar en el experimento de diseño las tres fases: prepararse para el experimento, experimentar en el aula y realizar análisis retrospectivos de los datos generados durante la implementación con los estudiantes (Cobb & Gravemeijer, 2008). Este tipo de estudios pretende desarrollar formas particulares de aprendizaje mientras se estudia el aprendizaje provocado en los ambientes diseñados.

Método de investigación

Enseguida se describe la población objetivo, el contexto y las técnicas de recolección de datos, así como las herramientas teórico metodológicas para su análisis.

Población de estudio

La actividad presentada fue implementada en un grupo de 36 estudiante inscritos en los primeros semestres en la carrera de Contador Público y cuyas edades oscilaban entre los 18 y 20 años de edad. En sesiones anteriores, los integrantes habían resuelto una actividad de modelación, por lo que ya contaban con experiencia para abordar este tipo de situaciones. La implementación de la actividad requirió de 4 sesiones con duración de una hora cada uno. Durante la implementación, los datos fueron recolectados mediante fotografías, video y bitácoras de los estudiantes.

Los participantes fueron organizados en nueve equipos compuestos por cuatro integrantes cada uno. La actividad fue resuelta en equipo y, posteriormente, la solución alcanzada se socializó en una discusión grupal. En una última producción, los estudiantes entregaron una solución individual al problema. El rol del docente fue clave durante todo el proceso realizando preguntas clave a los estudiantes encaminadas a profundizar en el modelo de solución alcanzado.

Descripción de las actividades

El diseño y la caracterización de los modelos desarrollados durante la implementación se sustentaron en el marco teórico de la PMM. Para familiarizar a los estudiantes con el contexto de la situación planteada se presenta la actividad calentamiento (Figura 1) que consistía en la lectura de un artículo de periódico y, su posterior discusión grupal para esclarecer posibles dudas respecto a la comprensión del contexto. Acto seguido se presentó la ADM (Figura 2) la cual abordaba una problemática relacionada con el contexto de la lectura. A continuación, se describen dichas actividades acompañadas de la imagen de las hojas de trabajo.

MÉXICO ES EL PAÍS DE LA OCDE QUE MÁS HORAS LABORA

Unas 2,25 horas al año es el promedio, mientras que Alemania es la nación con la cifra más baja entre los miembros de la organización, pero una de las más productivas.

La cultura laboral actual sostiene que cuantas más horas se trabaja, mejor será el sueldo percibido. Este no es el caso de México, uno de los países miembros de la OCDE donde los profesionales dedican más horas de trabajo semanales y reciben a cambio sueldos muy por debajo del promedio. Es por esto que cada día más trabajadores buscan mejorar sus condiciones salariales a través de nuevos empleos o emprendimientos propios.

Esta situación, sumada a la cantidad de trabajadores que existen en nuestro país (que alcanzan los 30 millones), genera inestabilidad y desinformación en los profesionales mexicanos. Para cambiarlo, es necesario un control de la normativa laboral existente y la generación de nuevas políticas que alienten a las empresas y compañías a generar una mayor retribución por productividad y brindar beneficios de acuerdo a los intereses de cada trabajador.

Artículo basado en la información: <https://www.eleconomista.mx/2015/09/21/mexico-esta-en-la-ocde-que-mas-horas-labora-entre-los-paises-miembros-de-la-ocde/>

Figura 1: Actividad de calentamiento

Actividad de calentamiento. Exuesta en la Figura 1 con el objetivo de introducir el contexto desde datos reales y actuales para sensibilizar a los estudiantes respecto a la problemática y motivarlos a resolver la situación de reparto de ganancias en la ADM (Figura 2).

Actividad Detonadora de Modelos: Reparto de ganancias En esta actividad (Figura 2) se plantea una situación en la cual dos hermanos (Alondra y Paco) quienes deciden iniciar juntos un negocio donde las tareas que realizarían están divididas a la por igual, sin embargo, el tiempo que Alondra le dedicada a las tareas que realiza representa ocho veces más del dedicado por su hermano Paco. La situación también contempla que, al momento de realizar la inversión inicial, Paco aportó un poco más de la mitad de dicha inversión. Lo anterior ha dado pie a la disyuntiva de cómo repartir las ganancias, por ello, los hermanos han decidido pedir ayuda para que los estudiantes propongan soluciones de reparto de las ganancias.

Resultados

En este apartado se analizan las producciones de los estudiantes durante la resolución de las actividades propuestas, primero en equipo y, posteriormente, la discusión de las mismas de manera grupal. Para el análisis del proceso de construcción de un modelo que dé respuesta a la situación presentada en la ADM exhibido por los estudiantes, se utilizó la caracterización de los ciclos de entendimiento de Vargas-Alejo, Reyes-Rodríguez y Cristóbal-Escalante (2016)

PROBLEMA 3

Para comenzar su negocio de pasteles, Alondra y Paco habían invertido \$800.00 pesos, de los cuales Paco había aportado \$455.00 y Alondra \$345.00 y, desde el principio, ambos hermanos habían comenzado trabajando tanto en la elaboración como en la venta. Sin embargo, negocio de pasteles había crecido, por lo que consideraron necesario dividir el trabajo. Paco se dedicó a calendarizar los pedidos, cobrar y entregar los pasteles, mientras que Alondra se encargó de comprar los ingredientes, hacer los pasteles y decorarlos. Paco tenía varios conocidos que habían probado los pasteles y pasteletos elaborados por Alondra, por lo que no tardó en comenzar a calendarizar los pedidos de pasteles y pasteletos. Los pedidos quedaron así:

Pedidos

- Para el Lunes debía entregar dos pasteles para el cumpleaños de Jorge
- Para el martes debía entregar seis pasteles para la cafetería "El encuentro"
- Para el miércoles debía entregar un pastel y una docena de pasteletos o cupcakes para el cumpleaños de Regina
- Para el jueves debía entregar 20 pasteles o cupcakes para el babyshower de Sofía
- Para el viernes debía entregar 2 pasteles y 62 cupcakes para el cumpleaños del jefe de Raúl



Al finalizar la semana, Alondra estaba muy cansada pues, por cada cuarto de hora que Paco había destinado a la venta, ella había dedicado 2 horas al proceso de preparación de los pasteles.

Ayuda a los hermanos a llegar a una forma de repartir las ganancias entre ambos. Puedes tomar como base la información que se te presenta y analizar las posibles maneras de dividir las ganancias entre ambos, también puedes buscar maneras alternativas de repartir las ganancias, sin embargo debes sugerir la que consideres mejor y justificar el por qué. Considera que Alondra y Paco continuarán con su negocio de pasteles, por lo que las condiciones pueden variar, por ejemplo, puede que haya veces que Paco trabaje más horas que Alondra o que Alondra decida invertir más dinero en la empresa.

Redacta una carta donde expliques cuál es la manera que sugieres para la repartición de las ganancias, justifica las razones que te llevaron a concluir esto y realiza una comparación de los beneficios que conlleva esta repartición en comparación de las otras.

Figura 2: ADM Reparto de ganancias

Ciclos de entendimiento

La introducción del contexto se llevó a cabo con la actividad de calentamiento (Figura 1). Fue durante la implementación de la ADM (Figura 2) cuando los estudiantes pusieron en evidencia tanto los ciclos de entendimiento por los que atravesaron, como los conceptos y representaciones que surgieron desde su conocimiento individual previo. La interacción con sus compañeros de equipo permitió observar, en los procedimientos escritos, el modelo de solución para distribuir las ganancias. A continuación, se explican, brevemente, las observaciones realizadas.

Ciclo de entendimiento cualitativo. Este ciclo tuvo lugar después de que los estudiantes leyeron el problema. En él seleccionaron los datos que consideraron importantes para la resolución de la ADM y desecharon la información que consideraron irrelevante. Por ejemplo, dentro de los datos que muestran en los procedimientos de los estudiantes está la división de trabajo. Estos datos formaban parte de la redacción de la ADM, sin embargo, la información no sigue la disposición en el documento que permita la comparación visual de las cantidades, por ello, fue notable en las producciones de los estudiantes el orden donde puede hacerse una comparación visual de los datos seleccionados como relevantes en la situación. Lo anterior, permitió identificar una aproximación cualitativa a la solución del problema.

Ciclo de entendimiento cuantitativo. Después de que los estudiantes realizaron una comparación cualitativa de la información seleccionada, decidieron realizar distintas representaciones matemáticas en la construcción de un modelo de solución. Dentro de los procedimientos exhibidos se observaron:

Diagramas circulares. se exhibe el uso implícito de porcentajes para designar la proporción de la gráfica que corresponde a una categoría como porcentaje de inversión ó tiempo dedicado a una tarea.

Representaciones aritméticas. Para el cálculo del cuarto proporcional los estudiantes utilizaron el algoritmo conocido como “regla de tres”. Por ejemplo, este procedimiento les permitió encontrar la proporción porcentual correspondiente a la aportación inicial de Paco y Alondra.

Representación tabular. La evidencia muestra la organización tabular donde la variación lineal fue relacionada, la progresión aritmética y la búsqueda del valor unitario. Esta representación fue utilizada por los equipos 1 y 2. En ella se muestra el uso de números racionales y la designación de unidades de tiempo (horas), los equipos la utilizaron para poder identificar y comparar el tiempo que cada integrante le dedicaba a sus tareas.

Ciclo de entendimiento algebraico. Las evidencias escritas por los integrantes muestran representaciones algebraicas de funciones lineales.

Formalización de los modelos de solución previa a la socialización en grupo

Se les pidió a los estudiantes que realizaran una presentación corta respecto a su solución. Todos los equipos expusieron sus soluciones, entre ellas se encontraron: repartir la ganancia tomando en cuenta la proporción de la inversión entregada por cada socio; el tiempo dedicado a sus tareas; o bien, una mezcla entre ambos factores para decidir la repartición más justa tomando en cuenta algunas otras características como dificultad de las tareas.

Socialización de las soluciones alcanzadas por equipos

Fue durante la socialización de los resultados por equipo donde se observó un refinamiento del modelo. La exposición y discusión grupal permitió que los estudiantes recurrieran a representaciones matemáticas que surgieron durante los ciclos de entendimiento y permitieron, no sólo, sustentar y argumentar respecto el modelo de solución alcanzado en el equipo, también dio paso a la posibilidad de construir otras representaciones que no habían surgido en los modelos alcanzados por equipo.

En la Tabla 2 se resumen algunos de los procedimientos mostrados, los conceptos matemáticos que emergieron, así como las representaciones.

Tabla 2 Resultados de la implementación de la actividad de reparto

Ciclos	Representación	Procedimientos	Conceptos matemáticos
Cualitativo	Verbal		Comparación
	Aritmética	Cálculo del cuarto proporcional	Fracción Razón Proporción Porcentaje Proporcionalidad
Cuantitativo	Diagramas	Uso del diagrama de circular para representar cantidades (inversión y tiempo laborado).	
	Tabular	Progresión aritmética Frecuencial	Constante y Variables Valor unitario Unidad dimensional
Algebraico	Algebraica	Uso de simbolismo algebraico	Función lineal

Fuente: Elaboración propia con base en Vargas-Alejo, Reyes-Rodríguez y Cristóbal-Escalante (2016).

Discusión y conclusión

Al ser un estudio de diseño una primera conclusión es que la actividad cumple con el diseño de una ADM al verificarse que satisface los principios de diseño establecidos por los investigadores Lesh, Hoover, Hole, Kelly, y Post, (2000). La temática abordada en las tareas de modelación documentadas en este artículo han interesado a los estudiantes y se han involucrado para desarrollar una solución que contrastan con la situación planteada para validarla y, posteriormente, la retoman para refinarla en más de un ciclo de entendimiento. Se observó, en los procedimientos llevados a cabo por los participantes durante la implementación de la actividad, el tránsito entre los ciclos cualitativo, cuantitativo, así como algebraico. Sin embargo, aquí se encuentra también lo que Vargas-Alejo, Reyes-Rodríguez y Cristóbal-Escalante (2016) mencionan: «la comprensión o entendimiento conceptual no se logra por medio de un proceso lineal [...] pueden existir ciclos de entendimiento intermedios entre los ciclos anteriores, los cuales señalan un tránsito entre ciclos e involucran un desarrollo incompleto de las fases de diferenciación, integración y refinamiento». (p. 70). La Figura 3 muestra un ejemplo respecto al tránsito entre ciclos de entendimiento, en este caso, los estudiantes se encuentran entre el ciclo de entendimiento cuantitativo y el algebraico puesto que identifican una “fórmula” para generalizar las posibles soluciones de reparto de ganancias, sin embargo, la expresión utilizada no es algebraica.

◦ Los 2 Recursos que en este caso se invierten en el negocio de la Repostería son: El Tiempo y El Dinero.

Como sabemos 800\$ es la inversión total, Alondra invirtió 345\$ ósea un 43.125% y Paco 455 un 56.875%

Cuando alondra trabaja 2 horas, Paco apenas trabaja 15 minutos, en términos de porcentajes

Alondra hace 87.5% del trabajo mientras que Paco un 12.5%

Y si se siguiera una de las 2 escalas, la repartición de la ganancia sería muy desigual, porque al pagarle según su inversión, Paco recibiría más dinero solo por haber invertido más y no trabajar casi nada en comparación, mientras que si se hiciera la repartición en cuestión del tiempo invertido Alondra recibiría mucho más que Paco e incluso Paco terminaría perdiendo dinero.

Por lo tanto la mejor opción es realizar un promedio entre ambos parámetros con la siguiente fórmula

$(\% \text{ de aportación} + \% \text{ de Tiempo}) / 2$ Para así realizar una proporción ideal

Figura 3: Evidencia de tránsito del ciclo de entendimiento cuantitativo al algebraico

Referencias

Carpenter, T. P., Fennema, E. & Romberg, T.A. (2012). *Rational numbers: An integration of research*. New York & London: Routledge, Taylor & Francis Group.

Cobb, P., & Gravemeijer, K. (2008). Experimenting to Support and Understand Learning Processes. En A. Kelly, R. Lesh & Baek, J. (Eds.) *Handbook of Design Research Methods in Education: Innovations in Science*. (pp. 68-95). New York: Routledge.

Hjalmarson, M., & Lesh, R. (2008). Engineering and Design Research. En A. Kelly, R. Lesh, & J. Baek, *Handbook of Design Research Methods in Education* (pp. 96-110). New York: Routledge.

Lesh, R., & Doerr, H. (2003). Beyond constructivism: A models and modelling perspective on teaching, learning, and problem solving in mathematics education. Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associate.

Lesh, R., Hoover, M., Hole, B., Kelly, A., Post, T., (2000). Principles for Developing Thought-Revealing Activities for Students and Teachers. En *Research Design in Mathematics and Science Education* (pp. 591-646). Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Martínez-Juste, S., Muñoz-Escalano, J. M. y Oller-Marcén, A. M. (2019). Introduciendo los repartos inversamente proporcionales durante dos ciclos de investigación-acción. En *J.M. Marbán et al. (Eds.) Investigación en Educación Matemática XXIII*, 413-422. Valencia, España: SEIEM.

Sánchez-Ordoñez, E. A. (2013). Razones, proporciones y proporcionalidad en una situación de reparto: una mirada desde la teoría antropológica de lo didáctico. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, 16(1), 65-97. Recuperado en 20 de noviembre de 2019, de http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1665-24362013000100004

Vargas-Alejo, V., & Reyes-Rodríguez, A., & Cristóbal-Escalante, C. (2016). Ciclos de entendimiento de los conceptos de función y variación. En *Educación Matemática*, 28 (2), 59-83.

Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. La teoría de los campos conceptuales. En *Recherches en Didactiques des Mathématiques*, 10(2), 133-170.